SCHEDA G3: Il gruppo delle isometrie piane

Introdurremo qui un particolare gruppo non abeliano associato alla Geometria Euclidea, il *gruppo delle isometrie piane*, di cui classificheremo gli elementi. Confronteremo anche le nozioni d'isometria e di congruenza delle principali figure piane.

Sia $\wp$ l'insieme dei punti del piano. Secondo consuetudine, indichiamo con lettere maiuscole A, B, P, ... i punti, con minuscole r, s, ... le rette, con lettere greche α, β, ... gli angoli e con f, g, σ, τ, ... le funzioni. La *congruenza* in senso geometrico di figure piane sarà qui denotata con $\equiv$.

Se $f: \wp \to \wp$ è una funzione ed f(P) = P, P si dirà *punto unito* per f. Analogamente, la retta r si dice *retta unita* per f se f(r) = r.

Chiamiamo *isometria del piano* una biiezione $f : \wp \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \wp$ tale che, per ogni coppia P, Q di punti, posto P' = f(P), Q' = f(Q), si ha $P'Q' \equiv PQ$.

Mediante il III criterio di congruenza dei triangoli si prova subito che se f è un'isometria, dati i tre punti P, Q, R e posto P' = f(P), Q' = f(Q), R' = f(R), i due triangoli PQR e P'Q'R' sono congruenti. Pertanto se R appartiene alla retta PQ anche R' appartiene alla retta P'Q'. Di conseguenza, ogni isometria trasforma rette in rette.
Inoltre, essa trasforma una circonferenza in una circonferenza con lo stesso raggio.

Denotiamo con Γ l'insieme delle isometrie e con id la *funzione identità* del piano $\wp$. Si ha:

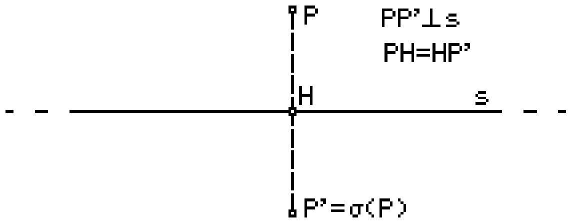
Proposizione G3.1. Γ è un sottogruppo del gruppo simmetrico $S_\wp$ delle biiezioni del piano $\wp$ in sé.

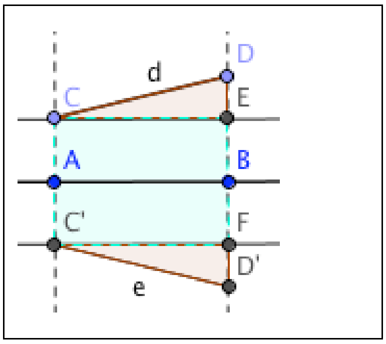
Dimostrazione. Ovviamente, $id \in \Gamma$. Inoltre, siano $f, g \in \Gamma$ e siano P, Q due punti. Posto P' = f(P), Q' = f(Q), P'' = g(P'), Q'' = g(Q'), si ha $P''Q'' \equiv P'Q'$, perché g è un'isometria, $P'Q' \equiv PQ$, perché f è un'isometria, quindi $P''Q'' \equiv PQ$. Ma allora anche $g \circ f$, che trasforma P in P'' e Q in Q'', è un'isometria. Infine, essendo $PQ \equiv P'Q'$, anche f^{-1}, che porta P' in P e Q' in Q, è un'isometria.

Siano s una retta e P un punto. Denotiamo con P' il *simmetrico* di P rispetto ad s, ossia il punto tale che la retta PP' sia perpendicolare ad s e il punto medio del segmento PP' appartenga ad s (*).

La funzione σ che ad ogni P associa il simmetrico P' si chiama *simmetria (assiale)* rispetto alla retta s, che prende il nome di *asse di simmetria*.

Si osservi che ogni punto di s è unito per σ; sono inoltre rette unite per σ sia s che le sue perpendicolari.





LEMMA G3.2. Ogni simmetria assiale è una isometria.

Infatti, consideriamo un segmento CD dapprima in uno dei due semipiani determinati dall'asse s. Riferendoci ai simboli della figura, sia C'D' il suo segmento simmetrico rispetto ad s. Da C e C' mandiamo le parallele ad s: allora CE e C'F sono paralleli e congruenti ad AB, perché lati opposti di rettangoli. Inoltre, $DE \equiv DB - EB \equiv BD' - BF \equiv D'F$. Pertanto i triangoli rettangoli CDE e C'D'F sono congruenti ed allora CD ≡ C'D'.

Gli altri casi li lasciamo per esercizio.

Vogliamo ora arrivare a provare che le simmetrie assiali sono un sistema di generatori per Γ. Di qui discenderà poi un criterio per classificare le isometrie piane. Per questo scopo occorrono tre lemmi.

LEMMA G3.3. Siano A, B due punti distinti: esistono due e solo due isometrie aventi A e B come punti uniti: l'identità e la simmetria σ rispetto alla retta AB.

Dimostrazione. Innanzitutto id e σ trasformano in sé sia A che B. Proviamo che sono le sole.
Sia s la retta AB e sia f∈Γ, tale che A e B siano uniti per f. Allora innanzitutto, s è unita per f, quindi per ogni punto P∈s, si ha P' = f(P)∈s. Per assurdo sia P ≠ P'. Essendo PA ≡ P'A, ne segue che se P e P' sono nella stessa semiretta di origine A necessariamente P = P'; dunque P e P' sono in semirette

(*) Le figure qui mostrate sono ottenute con l'applicazione Geometry (≅ Cabri II) della calcolatrice Voyage200 o con Geogebra. Si consiglia di tracciare sempre le figure descritte nel testo.

opposte e quindi A è il punto medio di PP'. Lo stesso per B, essendo PB ≡ P'B, dunque A = B, contro l'ipotesi. Dunque ogni punto di s è unito per f. Distinguiamo due casi:

a) f abbia un punto unito C fuori di s. Allora, ragionando come sopra, poiché su ciascuna delle rette AC e BC f ha due punti uniti, tutti i punti di AC e di BC sono uniti per f. Ciò posto, da ogni altro punto P si conduca una retta r, che intersechi le tre rette AB, AC, BC in almeno due punti distinti. Su r l'isometria f ha almeno due punti uniti, quindi anche P è unito. Ne segue f = id.

b) f non abbia punti uniti fuori di s. Per ogni punto P non appartenente ad s, posto P' = f(P), si ha ABP ≡ ABP', dunque APBP' è un quadrilatero somma di due triangoli isosceli con la stessa base PP', ed allora s = AB è l'asse di PP'. Ne segue f = σ.

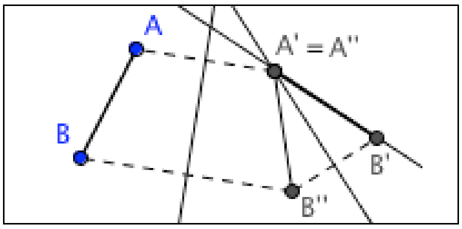
LEMMA G3.4. Dati due segmenti congruenti AB ed A'B' (non degeneri, cioè con A ≠ B, A' ≠ B'), esistono due e solo due isometrie f_1 ed f_2 che portano A in A' e B in B'. Detta σ la simmetria rispetto alla retta A'B', si ha $f_2 = \sigma \circ f_1$. Inoltre, ciascuna delle due è prodotto di al più tre simmetrie.

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'esistenza, distinguendo tre casi.

a) A = A', B = B'. Allora ci sono f_1 = id ed $f_2 = \sigma$. Si ha $f_2 = \sigma \circ f_1$ e, essendo $f_1 = \sigma^2$, ciascuna delle due è prodotto di al più tre simmetrie.

b) A = A', B ≠ B'. Sia σ_1 la simmetria rispetto all'asse r del segmento BB': r passa per A, dunque A (= A') è unito per σ_1 e B è portato in B'. Pertanto, posto $f_1 = \sigma_1$ e $f_2 = \sigma \circ \sigma_1$, entrambe queste isometrie portano A in A' e B in B', sono prodotto di al più tre simmetrie, e si ha $f_2 = \sigma \circ f_1$.

c) A ≠ A', B ≠ B'. Sia σ_2 la simmetria rispetto all'asse del segmento AA': essa porta A in A' e B in un punto B''. Sia poi σ_1 la simmetria rispetto all'asse del segmento B''B': essa porta A' in sé e B'' in B'.



Pertanto $f_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ porta A in A' e B in B' e lo stesso accade per $f_2 = \sigma \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) = \sigma \circ f_1$. Inoltre, anche in questo caso, ciascuna delle due è prodotto di al più tre simmetrie.

Proviamo che sono le uniche due.

Sia f∈Γ, tale che f(A) = A', f(B) = B': allora $f \circ f_1^{-1}$ trasforma in sé sia A' che B': per il lemma G3.3 si ha $f \circ f_1^{-1}$ = id (quindi $f = f_1$) oppure $f \circ f_1^{-1} = \sigma$, quindi $f = \sigma \circ f_1 = f_2$.

LEMMA G3.5. Dati due triangoli (non degeneri) ABC ed A'B'C', con A'B' ≡ AB, A'C' ≡ AC, B'C' ≡ BC, esiste una ed una sola isometria che porti A in A', B in B', C in C', ed essa coincide con una delle due che portano A in A' e B in B'.

Dimostrazione. Innanzitutto, per il lemma G3.4, ogni isometria che trasformi A in A', B in B', C in C' coincide con una delle due, f_1 o f_2, che portano A in A' e B in B'. Ciò posto esaminiamo f_1 ed f_2.

Se $f_1(C) \neq C'$ allora $f_1(C)$ è il simmetrico di C' rispetto alla retta A'B' e, detta al solito σ la simmetria rispetto a tale retta, si ha $f_2(C) = \sigma \circ f_1(C) = C'$. Se invece $f_1(C) = C'$, allora $f_2(C) \neq C'$.

In ogni caso, dunque, esiste una ed una sola isometria che porti A in A', B in B', C in C', ed è una delle due isometrie f_1 o f_2.

Osserviamo che il gruppo Γ, agendo come gruppo di permutazioni sul piano, induce un'azione sull'insieme dei sottoinsiemi, cioè delle figure, suddividendole in Γ-orbite (cfr. G1).

Diremo *isometriche* due figure nella stessa Γ-orbita.

Che relazione c'è tra figure congruenti e figure isometriche?

La classe dei punti è la stessa in entrambe le relazioni d'equivalenza. Infatti, dati due punti P, Q la simmetria rispetto all'asse di PQ porta P in Q.

Analogamente, date due rette r, s, la simmetria rispetto alla bisettrice t di uno dei quattro angoli (se incidenti) o all'asse del segmento determinato da una perpendicolare comune se parallele, porta r in s. Pertanto, tutte le rette sono sia congruenti sia isometriche.

Il teorema G3.5. prima dimostrato mostra che la classe di congruenza e quella d'isometria di un triangolo coincidono.

Ne segue che anche le classi di congruenza e d'isometria di un segmento e quelle di un angolo coincidono.

In particolare, dato un segmento AB, un punto O ed una semiretta r di origine O, esiste una isometria che porta A in O e B in un punto P di r, e OP = AB.

Questo è il postulato del trasporto di segmenti.

In modo analogo, anche il trasporto di angoli si può esprimere mediante isometrie.

Allora, perché non sostituire la relazione di isometria a quella di congruenza?

Ossia, perché non diciamo che due figure sono congruenti se esiste un'isometria che trasforma l'una nell'altra?

Si può fare. Però il problema è ora scegliere tra gli infiniti sottogruppi del gruppo simmetrico del piano uno che ci consenta di ricostruire la congruenza come la vogliamo.

Ossia, si devono postulare proprietà del gruppo Γ in luogo di quelle della congruenza.

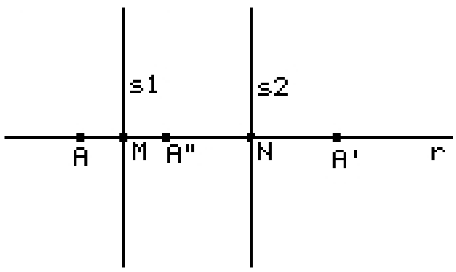
Ora classifichiamo le isometrie partendo dal seguente teorema, corollario del precedente teorema G3.5, che afferma che le simmetrie generano il gruppo Γ.

TEOREMA G3.6. Ogni isometria è scomponibile nel prodotto di al più tre simmetrie assiali.

Dimostrazione. Sia f un'isometria e siano A, B, C tre punti non allineati. Posto A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), per il lemma G3.5, f coincide con una delle due, f_1 ed f_2, che portano A in A' e B in B' e che, come risulta dal lemma G3.4, sono prodotto di al più tre simmetrie. Ciò prova il teorema.

Classificazione delle isometrie. Incominciamo ora a studiare il prodotto di **due** simmetrie assiali σ_1 e σ_2 di assi rispettivamente s_1 ed s_2. Innanzitutto, se i due assi coincidono, il prodotto $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è l'identità. Distinguiamo ora due casi.

A) **SIMMETRIE CON GLI ASSI PARALLELI.** Siano A un punto del piano, r la perpendicolare comune da A ai due assi e sia M l'intersezione di r con s_1, ed N quella con s_2. Poniamo poi A" = σ_1(A), A' = σ_2(A"). Tutti i punti considerati appartengono ad r. Inoltre $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ trasforma A in A' e si ha:



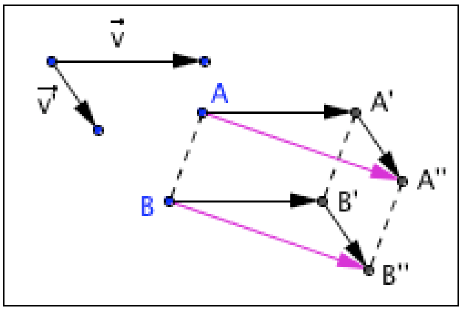
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA''} + \overrightarrow{A''A'} = 2\overrightarrow{MA''} + 2\overrightarrow{A''N} = 2\overrightarrow{MN}$$

Pertanto, ad ogni punto A è associato da τ il punto A' sulla perpendicolare da A ai due assi, con distanza doppia rispetto a quella tra i due assi stessi e con verso concorde con quello da M ad N.
L'isometria τ prende il nome di *traslazione*. Ad essa è associato un *vettore*(*) v = v(τ) del piano, pari al doppio del vettore $\overrightarrow{MN}$, e per ogni punto P si ha P' = τ(P) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{MN}$.
Inversamente, dato un vettore v non nullo, si fissino due rette s_1 ed s_2 perpendicolari a v, con distanza fra di esse pari alla metà del *modulo* di v e tali che, fissata una qualunque perpendicolare r ad entrambe e detti M ed N i punti di intersezione di r con s_1 ed s_2, il vettore $\overrightarrow{MN}$ risulti *concorde* con v. Allora, detta σ_i la simmetria di asse s_i, l'isometria $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ è una traslazione e si ha v(τ) = v.

(*) Si dà qui per nota la nozione di vettore come *classe di equipollenza* di *segmenti orientati*.

L'identità id si può in particolare considerare una traslazione, prodotto di due simmetrie con assi coincidenti; precisamente è la traslazione associata al *vettore nullo*.

Siano A, B due punti e siano A' = τ(A), B' = τ(B). I segmenti orientati $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$ rappresentano entrambi il vettore v, pertanto ABB'A' è un parallelogrammo.



Siano ora τ' un'altra traslazione; posto v' = v(τ'), A" = τ'(A'), B" = τ'(B'), A'B'B"A" è un parallelogrammo. Allora i tre segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$ sono equipollenti (cioè hanno la stessa lunghezza, sono paralleli ed equiversi) e, di conseguenza, il quadrilatero ABB"A" è un parallelogrammo. Ma allora l'isometria τ" = τ'∘τ è a sua volta una traslazione, quella associata al vettore v" = $\overrightarrow{AA''}$, che risulta essere congruente a v+v'.

Si ha così il seguente risultato:

PROPOSIZIONE G3.7. L'insieme T delle traslazioni costituisce un sottogruppo abeliano del gruppo Γ delle isometrie piane.

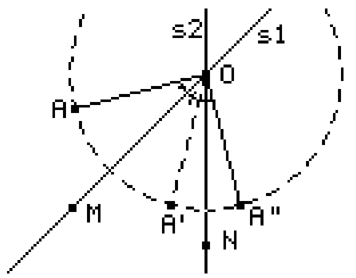
Dimostrazione. Abbiamo già provato la chiusura di T rispetto alla composizione ed all'identità. Infine, se τ∈T, $\tau = s_2 \circ s_1$, allora $\tau^{-1} = s_1 \circ s_2$ è ancora una traslazione. Pertanto, T costituisce un sottogruppo di Γ. Tale sottogruppo è abeliano, poiché alla composizione di traslazioni corrisponde biunivocamente l'addizione dei vettori associati. La funzione che associa ad ogni τ∈T il corrispondente vettore v = v(τ) è un isomorfismo tra il gruppo (T, ∘) ed il gruppo additivo ($\mathbf{R}^2$, +) dei vettori del piano, pertanto T è abeliano.

Osservazioni. 1. Sia τ una traslazione ≠ id e sia d il modulo del vettore associato. Allora per ogni punto P, e per ogni n∈**N**, posto $P_n = \tau^n(P)$, la lunghezza del segmento PP_n è nd. Di conseguenza, tutte le traslazioni diverse dall'identità hanno periodo infinito, poiché per ogni $n \geq 1$ si ha $P_n \neq P$ e quindi $\tau^n \neq \tau$.

2. Se due simmetrie con assi paralleli individuano (in un fissato ordine) una traslazione, viceversa una traslazione τ è individuata da infinite coppie di simmetrie con assi paralleli: una di esse può essere scelta arbitrariamente, purché il suo asse sia perpendicolare al vettore v(τ).

3. Sia τ una traslazione ≠ id e sia v il suo vettore associato. Le rette parallele a v sono unite per τ, mentre nessun'altra retta e nessun punto lo sono.

B) **SIMMETRIE CON ASSI INCIDENTI.** Siano σ_1 e σ_2 le due simmetrie, s_1 ed s_2 i loro assi ed O il punto di intersezione degli assi. Sia poi $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Il punto O è unito per ρ, dunque sono trasformate in sé tutte le circonferenze di centro O. Per ogni punto A, posto $A'' = \sigma_1(A)$, $A' = \sigma_2(A'')$, i punti A, A" ed A' appartengono alla stessa circonferenza di centro O e raggio OA.



La retta s_1 è bisettrice dell'angolo $A\hat{O}A'$, mentre s_2 lo è di $A'\hat{O}A''$. Pertanto, denotando con $\alpha/2$ l'angolo convesso *orientato in senso antiorario*(*) da s_1 ad s_2, si ha $A\hat{O}A'' = \alpha$. Lo stesso accade per ogni punto.

Chiamiamo ρ *rotazione* di centro O ed ampiezza α: per ogni punto P si ha dunque $P' = \rho(P)$ se e solo se $OP \equiv OP'$ e $P\hat{O}P' = \alpha$.

L'identità del piano si può considerare anche come una rotazione di centro O ed ampiezza nulla (id è il prodotto di due simmetrie con assi coincidenti, cioè incidenti in *tutti* i punti). Si può dimostrare il seguente risultato:

PROPOSIZIONE G3.8. L'insieme delle rotazioni di centro O con la composizione costituisce un sottogruppo abeliano del gruppo Γ delle isometrie piane. Se ρ_1 e ρ_2 sono rotazioni di ampiezze rispettivamente α_1 ed α_2, $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ è una rotazione di ampiezza $\alpha_1 + \alpha_2$ (modulo l'angolo giro, cioè identificando l'angolo giro con l'angolo nullo). Tale gruppo è isomorfo al gruppo quoziente $\left(\mathbf{R}/\langle 2\pi \rangle, +\right)$ e quindi è abeliano. L'isomorfismo si ottiene associando ad ogni rotazione la sua ampiezza.

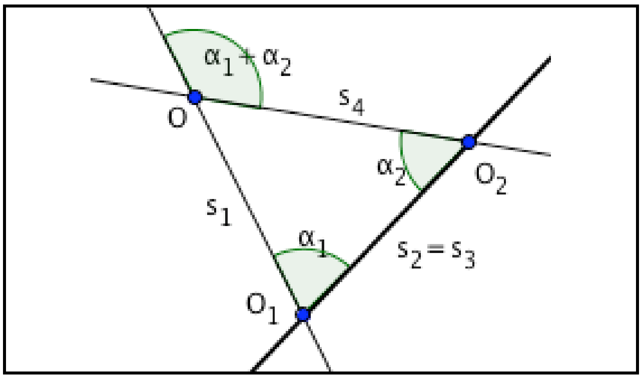
Osservazioni. 1. Una rotazione ρ di ampiezza α ha periodo finito se e solo se esiste $k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, tale che $\rho^k = id$, ossia se e solo se $k\alpha$ è l'angolo nullo. Denotata ancora con α la misura in radianti dell'ampiezza, ciò è possibile se e solo se esistono m, n interi positivi tali che $n\alpha = 2m\pi$. In tal caso, $\alpha = 2\frac{m}{n}\pi$. Supponendo la frazione $\frac{m}{n}$ ridotta ai minimi termini, il periodo di ρ è uguale al denominatore n di tale frazione.

(*) L'orientamento degli angoli in senso orario o antiorario è dato qui per noto. Anche il concetto di ampiezza di un angolo in radianti è dato per noto.

2. Se due simmetrie con assi incidenti individuano (in un fissato ordine) una rotazione, viceversa una rotazione è individuata da infinite coppie di simmetrie con assi incidenti: una di esse può essere scelta arbitrariamente, purché il suo asse passi per il centro della rotazione.
3. Sia ρ una rotazione di centro O e di ampiezza α non nulla. Se α non è l'angolo piatto, oltre ad O non vi sono punti o rette uniti per ρ. Se invece α è l'angolo piatto, sono unite per ρ anche tutte le rette passanti per O. Quest'ultima rotazione è detta *simmetria centrale* di centro O ed è l'unica di periodo 2.

LEMMA G3.9. Siano ρ_1 e ρ_2 due rotazioni di centri distinti O_1 ed O_2 ed ampiezze $2\alpha_1$ e $2\alpha_2$. Se $\alpha_1+\alpha_2$ è l'angolo piatto, $\rho_2°\rho_1$ è una traslazione, altrimenti è una rotazione di ampiezza $2(\alpha_1+\alpha_2)$. In ogni caso, $\rho_1°\rho_2 \neq \rho_2°\rho_1$.

Dimostrazione. Rappresentiamo le rotazioni come prodotto di simmetrie, ma, tenendo conto dell'osservazione 2 a G3.8, scegliamo i fattori in modo che risulti $\rho_1 = \sigma_2°\sigma_1$, $\rho_2 = \sigma_4°\sigma_3$, dove σ_3 e σ_2 coincidono con la simmetria di asse O_1O_2.
Allora $\sigma_3°\sigma_2 = id$, quindi $\rho_2°\rho_1 = \sigma_4°\sigma_1$ è una rotazione o una traslazione. E' una traslazione se e solo se gli assi s_4 ed s_1 delle due simmetrie sono paralleli, il che accade se e solo se gli angoli coniugati interni che essi formano con la retta O_1O_2 sono supplementari, cioè hanno per somma un angolo piatto. Tali angoli sono rispettivamente metà delle ampiezze delle due rotazioni, dunque $\rho_2°\rho_1$ è una traslazione se e solo se $2(\alpha_1+\alpha_2)$ è l'angolo giro, identificato con l'angolo nullo.



Altrimenti, detto O il punto intersezione di s_4 ed s_1, $\rho_2°\rho_1$ è una rotazione di centro O e, poiché l'angolo (orientato) di vertice O tra s_1 ed s_4 è esterno al triangolo OO_1O_2, è somma dei due interni non adiacenti, cioè di α_1 ed α_2. Ne segue che $\rho_2°\rho_1$ ha ampiezza $2(\alpha_1+\alpha_2)$.

Infine, si può osservare che, nel caso di $\alpha_1+\alpha_2$ congruente all'angolo piatto, le due traslazioni $\rho_1°\rho_2$ e $\rho_2°\rho_1$ hanno versi opposti, mentre se $\alpha_1+\alpha_2$ non è l'angolo piatto, le due rotazioni $\rho_1°\rho_2$ e $\rho_2°\rho_1$ hanno centri simmetrici rispetto alla retta O_1O_2.

LEMMA G3.10. Componendo una rotazione ρ con una traslazione τ si ottiene una rotazione di ampiezza uguale a quella di ρ.

Dimostrazione. Come nel lemma precedente, siano $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$, $\tau = \sigma_4 \circ \sigma_3$, con $\sigma_2 = \sigma_3$. Allora gli assi s_4 ed s_1 si incontrano in un punto O' e $\tau \circ \rho = \sigma_4 \circ \sigma_1$ è una rotazione. Il teorema sugli angoli alterni di rette parallele tagliate da una trasversale assicura che l'ampiezza della composta coincide con quella di ρ. Analogamente si procede per valutare $\rho \circ \tau$.

Rotazioni e traslazioni sono dette anche *movimenti* o *isometrie dirette* del piano. Si ha:

TEOREMA G3.11. L'insieme M dei movimenti del piano costituisce un sottogruppo del gruppo Γ delle isometrie.

Dimostrazione. Abbiamo già provato in G3.7, G3.9. G3.10 che componendo due movimenti si ottiene un movimento. Inoltre, l'identità è un movimento e l'inversa di una traslazione è una traslazione (di vettore opposto), mentre l'inversa di una rotazione è una rotazione con lo stesso centro ed ampiezza opposta (cioè esplementare).

COROLLARIO G3.12. Ogni prodotto di un numero pari di simmetrie è un movimento. Ogni prodotto di un numero dispari di simmetrie è prodotto di un movimento per una simmetria.

Chiamiamo *isometria inversa* ogni isometria che non sia un movimento. Sono dunque isometrie inverse le simmetrie ed i prodotti di tre simmetrie.

Il prodotto di due isometrie inverse è un movimento, perché prodotto di un numero pari di simmetrie, mentre l'inversa di un'isometria inversa è ancora un'isometria inversa.

Si tratta ora di classificare le isometrie inverse, ovvero di classificare i prodotti di tre simmetrie.

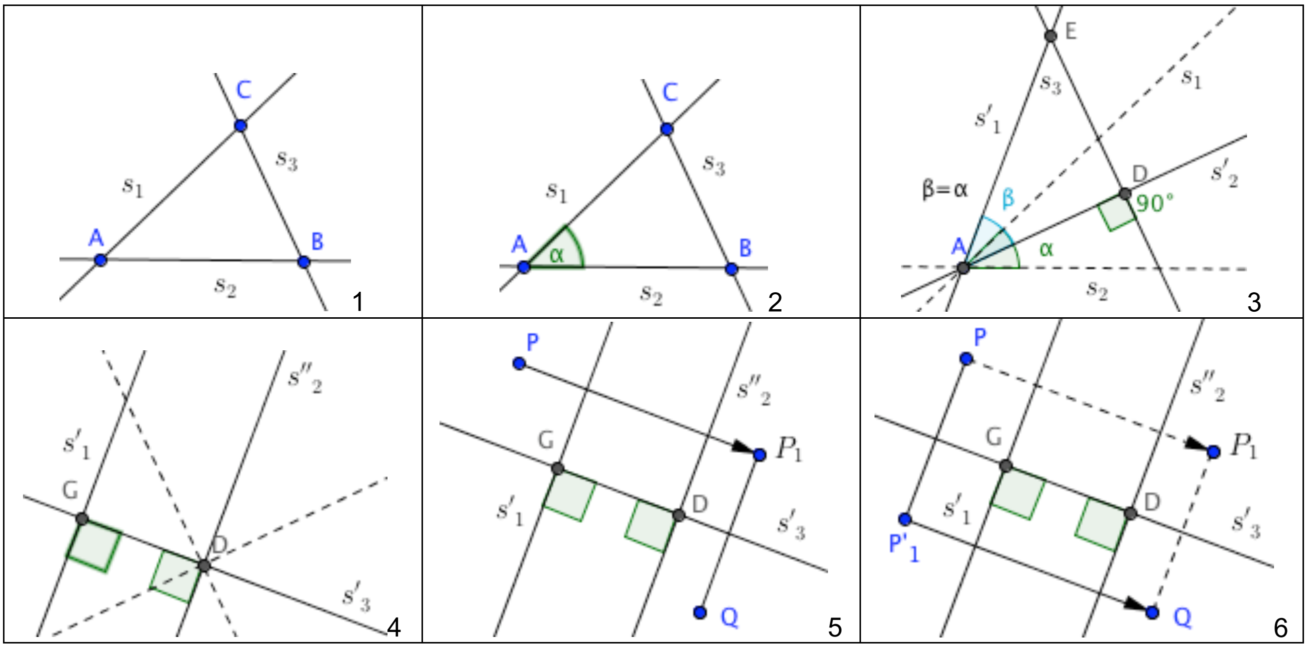
Chiamiamo innanzitutto *antitraslazione* (o *glissometria*) il prodotto di una traslazione τ per una simmetria σ di asse parallelo al vettore $v = v(\tau)$.
Si dimostra facilmente che si ha $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ (fig. 6 seguente).

TEOREMA G3.13. Le isometrie inverse sono simmetrie assiali o antitraslazioni.

Dimostrazione. Sia dato il prodotto di tre simmetrie σ_i di assi s_i. Se i tre assi sono paralleli o se passano per uno stesso punto, il risultato è una simmetria. Infatti, nel primo caso il prodotto $\sigma_3 \circ \sigma_2$ è una traslazione τ, che possiamo riottenere come prodotto di due nuove simmetrie σ'_3 e σ'_2, ma con $\sigma'_2 = \sigma_1$. Allora: $(\sigma_3 \circ \sigma_2) \circ \sigma_1 = (\sigma'_3 \circ \sigma'_2) \circ \sigma_1 = \sigma'_3 \circ (\sigma'_2 \circ \sigma_1) = \sigma'_3$.

Analogamente si ragiona se i tre assi passano per uno stesso punto.

Vediamo il caso di tre assi s_i, con i = 1,2,3, che formano un triangolo ABC (fig. 1).



Allora $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è una rotazione (fig. 2), che possiamo rappresentare con altre due rette s'_1 ed s'_2 con s'_2 perpendicolare ad s_3 (fig. 3). Allora $\sigma_3 \circ \sigma'_2$ è una rotazione di ampiezza un angolo piatto, cioè una simmetria centrale, il cui centro D è il punto d'incontro di s'_2 ed s_3.

Possiamo rappresentare (fig. 4) la simmetria centrale mediante due nuove rette s''_2 ed s'_3 per D, con s'_3 perpendicolare ad s'_1, e quindi con s''_2 parallela ad s'_1. Ne segue (fig. 5) che $\sigma'_2 \circ \sigma'_1$ è una traslazione τ il cui vettore v è parallelo all'asse di σ'_3, cioè $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma'_3 \circ \tau$ è un'antitraslazione. Si osservi che (fig. 6) traslazione e simmetria commutano.

Se invece s_2 ed s_3 sono paralleli, non lo sono però s_1 ed s_2, e si ragiona analogamente.

Osservazioni. 1. Sia a un'antitraslazione, $a = t \circ \sigma$; poiché come già osservato, si ha anche $a = \sigma \circ t$, allora $a^2 = a \circ a = t \circ \sigma \circ \sigma \circ t = t^2$, cioè a^2 è una traslazione. Ne consegue che a ha periodo infinito.

2. Sia a un'antitraslazione, $a = t \circ \sigma$. L'asse s della simmetria σ è unito per a, mentre nessun'altra retta e nessun punto lo sono. Per ogni punto A, posto $A' = a(A)$, il punto medio di AA' appartiene ad s, che è chiamato *asse* dell'antitraslazione.

La classificazione è così completa. Riassumendo, vi sono quattro tipi di isometrie piane: le traslazioni, le rotazioni, le simmetrie assiali e le antitraslazioni. I primi due tipi costituiscono le isometrie dirette o movimenti, le altre costituiscono le isometrie inverse.

L'identità id è un'isometria diretta e si può identificare con la traslazione associata al vettore nullo, oppure con la rotazione di ampiezza nulla e centro arbitrario.

isometria	**periodo**	**punti uniti**	**rette unite**
Identità	1	tutti	tutte
Traslazione di vettore $v \neq 0$	infinito	nessuno	le parallele a v
Rotazione di centro O e ampiezza $\alpha \neq 0, \pi$	finito o no	O	nessuna
Simmetria centrale	2	O	le rette per O
Simmetria di asse s	2	i punti di s	s e le sue perpendicolari
Antitraslazione di asse s	infinito	nessuno	s

Nel gruppo delle isometrie Γ abbiamo quindi il sottogruppo dei movimenti M, contenente rotazioni e traslazioni. Queste ultime formano un sottogruppo abeliano T di M.
Gli elementi di periodo finito sono solamente: le simmetrie assiali, di periodo 2, e le rotazioni il cui angolo è commensurabile con l'angolo giro (si veda l'osservazione 1 a G3.8)

Dopo le isometrie, si possono definire le *similitudini,* come particolari biiezioni f del piano in sé: esiste k reale positivo tale che per ogni P, Q, posto P' = f(P), Q' = f(Q), si ha P'Q' = kPQ. Anche queste trasformano rette in rette, conservano l'ampiezza degli angoli e formano un gruppo rispetto alla composizione. Per k = 1 si ottiene il sottogruppo Γ delle isometrie. Le *omotetie* sono poi particolari similitudini con un punto unito O e tali che detto P' il corrispondente di P, allora O, P , P' sono allineati e OP' = kOP. Si dimostra che ogni similitudine è la composizione di un'isometria con una omotetia.
Analogamente al caso di figure isometriche e congruenti, si possono chiamare *simili* due figure che si corrispondono in una similitudine.

Infine, un ulteriore gruppo di trasformazioni è costituito dalle *affinità*, che trasformano rette in rette e di cui le similitudini sono un sottogruppo. Nella Geometria affine le distanze e gli angoli non sono conservati, quindi non hanno significato, mentre ce l'ha quella di parallelismo, di punto medio di un segmento e di area: figure affini hanno aree in rapporto costante.

Torneremo su questi gruppi, sulle loro proprietà e sulla traduzione analitica di queste trasformazioni nel modulo di Elementi di Algebra.

SCHEDA G4: Che cos'è Geometria?

Questa scheda doveva essere introduttiva al corso. Fu preparata in vista di un mio intervento di 8 ore, pari ad un credito, nel modulo di Elementi di Geometria di alcuni anni fa, che poi non si fece, ed è stato proiettato in parte durante la prima ora del corso di quest'anno 2014-15.
La sua collocazione assume ora il significato di un commento a posteriori di quanto visto e di quanto altro si sarebbe potuto esaminare nel corso.

Come vedo io la Geometria non ha importanza: ciascuno di noi ha la sua opinione, apprezza o non apprezza certi aspetti, gradisce o no certe impostazioni.

Tuttavia, la dovremo presentare ai nostri allievi e dovremo cercare di farli appassionare o, almeno, cercare di non fargliela odiare o, peggio, di non farla considerare una cosa irrilevante. Non è facile.

Pensandoci, vedrei la Geometria come una guida per scoprire e descrivere *forme, traiettorie, simmetrie* della Natura. Questi aspetti si incontrano già nella scuola dell'infanzia, poi nelle scuole primarie e nelle secondarie di primo grado (le ex elementari e medie), ma con un insegnamento *a spirale*, cioè a passaggi successivi sugli stessi concetti, e può essere ripreso anche nella scuola secondaria di secondo grado e servire come punto di partenza. La differenza rispetto agli insegnamenti delle scuole inferiori consisterà nel proporre esempi più complessi dal punto di vista concettuale, che richiedano una precisione superiore e strumenti più sofisticati per essere "modellizzati" e quantificati.

Dico subito che difficilmente si potranno cercare esempi tratti dalla vita quotidiana di lettori di giornali sportivi o di riviste di moda o di pettegolezzi. Si potranno invece usare argomenti tratti dalla vita professionale di artisti, scienziati, tecnici, o dalla storia della cultura. Perché no? Chissà che professione farà da grande ognuno dei nostri allievi?

Che strumenti usare? Sicuramente immagini e testi tratti da Internet, da libri ed enciclopedie, proposti usando tecnologie più o meno moderne (poster, lucidi, diapositive, Lim, film o proiezioni di collegamenti ad Internet o di immagini in PDF o in Power Point), seguiti da "modellizzazioni" eseguite con carta e penna, ma anche con software di calcolo numerico, simbolico e soprattutto di geometria dinamica. Numerose riviste ed associazioni si occupano di questi aspetti.

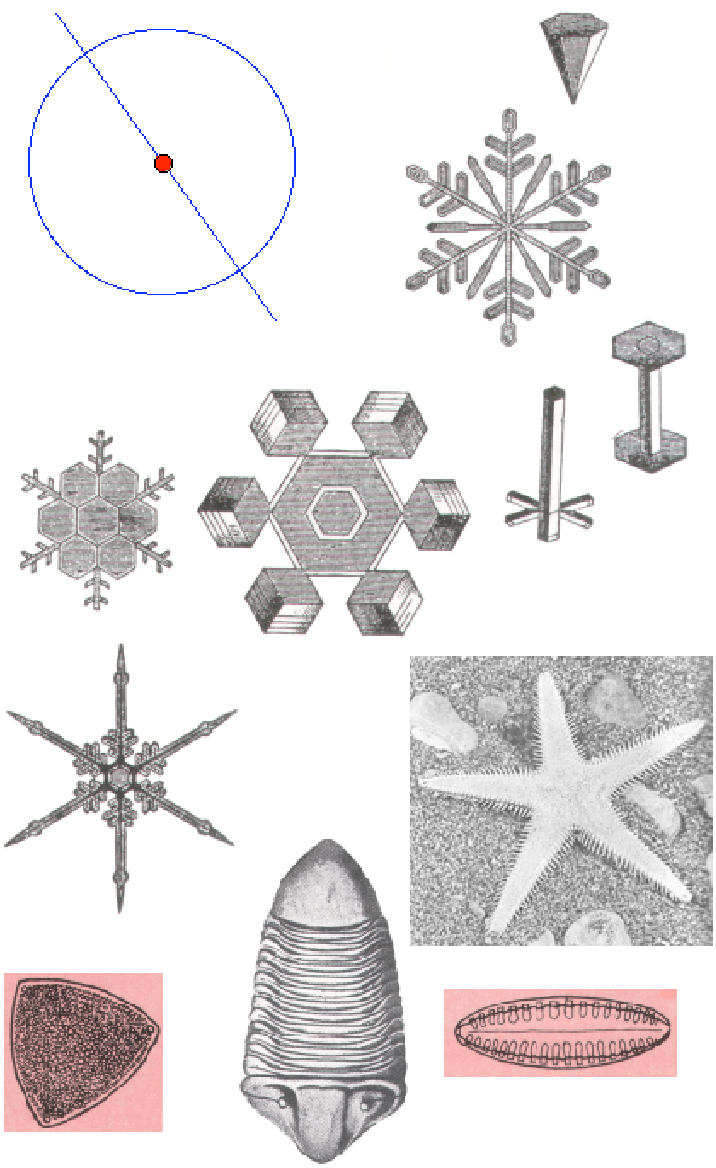
I software di Geometria Dinamica, di cui CABRI è stato un precursore, seguito poi da vari altri, GEOGEBRA soprattutto, sono specializzati nel trattare figure geometriche piane, ma ora anche di figure 3D, ossia nello spazio. In particolare, con questi programmi si possono eseguire sul piano sia costruzioni classiche, come tracciare punti, rette, segmenti, angoli, poligoni, circonferenze, archi, rette parallele, rette perpendicolari, sia trasformazioni geometriche. Non solo, ma, ed in questo si manifesta la loro superiorità sul disegno manuale, è possibile anche spostare oggetti, deformare ed animare le figure, tracciare luoghi geometrici; assegnare i nomi a punti e rette, o inserire scritte e colori; si possono misurare segmenti, distanze, angoli, coordinate di punti, aree. Alcuni di questi software hanno un costo, altri sono gratuiti.

Ormai questi software, oltre alla parte di geometria razionale, sono in grado di tracciare grafici di funzioni, che vengono trattati come oggetti geometrici o analitici, mediante C.A.S. in grado di calcolare per esempio derivate o sviluppare espressioni algebriche.

Nelle figure contenute negli appunti mi sono servito soprattutto di Geogebra, ma, per appunti vecchi riutilizzati, ho lasciato disegni eseguiti col software Cabri II installato sulle calcolatrici "simboliche" TI92 Plus della Texas Instruments, che per anni sono servite per la parte grafica ed analitica dei corsi di laboratorio che ho tenuto, anche se la scarsa definizione dello schermo li rende ormai poco accettabili.

Mostrerò nel seguito alcune illustrazioni tratte da testi di vario contenuto ed esempi di figure eseguite con l'ausilio di Geogebra, della TI 92 Plus, di programmi di grafica o disegno, e del Cabri 3D, per evidenziare la vastità di usi della Geometria anche al di fuori della scuola.

Incominciamo con alcune immagini tratte dalla natura per illustrare forme, traiettorie, simmetrie e, più in generale, "cose" che io penso di poter considerare "geometriche".

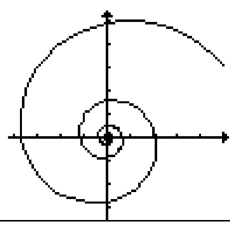


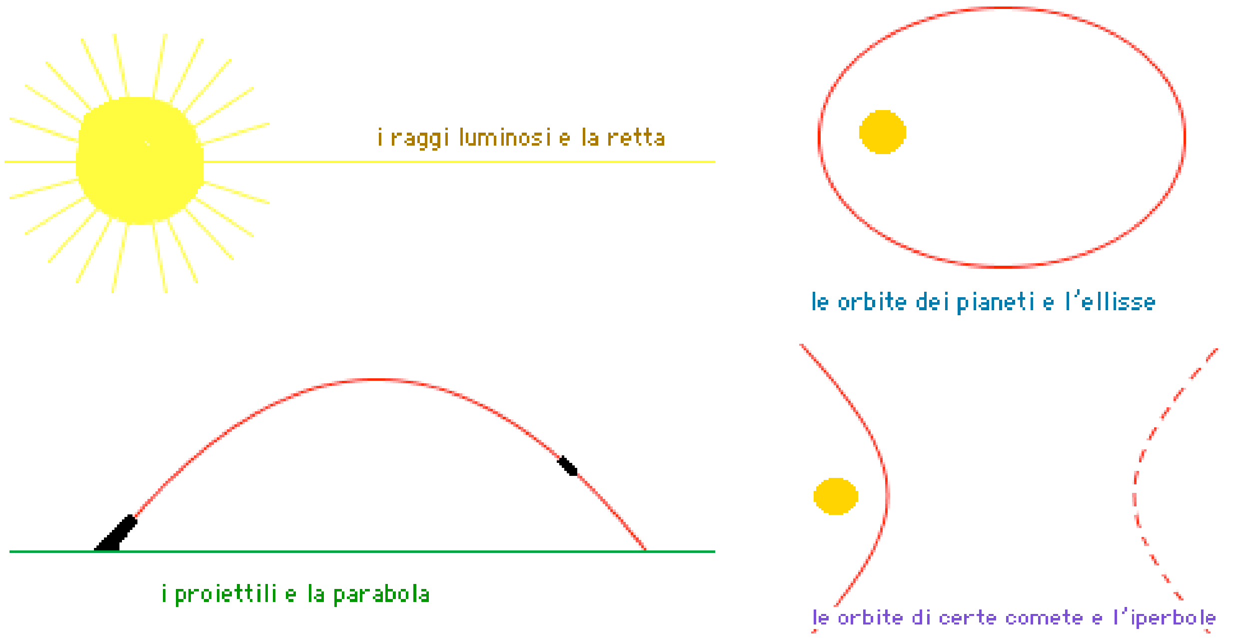
Vediamo dapprima qui varie forme tratte dalla natura. Sembra impossibile, ma alcune di esse sono tratte dalla biologia: si tratta di alghe microscopiche a scheletro siliceo dette *diatomee*, che vivono nel mare e che, morendo, lasciano il loro guscio sul fondo, dove si forma una specie di sabbia detta *farina fossile* e che serve tra l'altro nella fabbricazione della dinamite. Si vede però anche l'immagine di una stella marina, un animale abbastanza grande e comune.

Queste immagini presentano con buona approssimazione varie *simmetrie* e per questo le considero oggetti geometrici interessanti. In cinque casi si ritrovano le 12 simmetrie dell'esagono regolare; in uno le 10 del pentagono; in un altro le 6 del triangolo equilatero, poi le 4 del rettangolo in due casi, e in uno, lo strano oggetto in basso, solo due. Il caso più complesso è il solido con due esagoni uniti rigidamente da un asse cilindrico. In questo caso, le simmetrie sono 24. Ovviamente il più simmetrico è il cerchio.

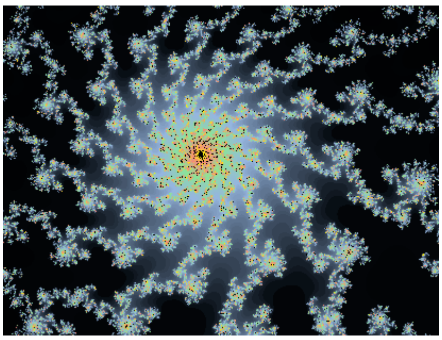
La conchiglia del nautilo qui accanto non presenta simmetrie del tipo delle precedenti, tuttavia il suo profilo si descrive mediante una curva della famiglia delle spirali. Queste ultime non si riescono a scrivere come grafici di funzioni y = f(x), ma solo in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1.2^{t} \cdot \cos(t)}{15} \\[2ex] y = -\dfrac{1.2^{t} \cdot \sin(t)}{15} \end{cases}, \quad 0 \le t \le 24$$





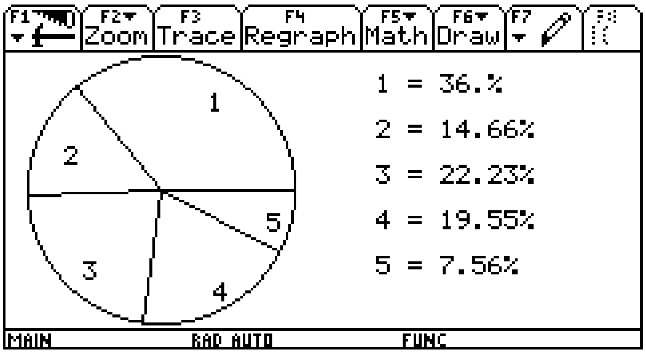
Le traiettorie dei corpi in movimento sono oggetti geometrici interessanti. Con buone approssimazioni e prescindendo da attriti o interazioni gravitazionali estranee, possiamo descriverle spesso mediante curve di tipo elementare. Nella figura sono riportati alcuni esempi di traiettorie a forma di coniche, ed anche un possibile esempio fisico di retta. Si tratta di modelli, che non tengono conto di tutte le variabili in gioco, ma consentono di comprendere meglio i fenomeni e di formulare previsioni.



Ed ecco altre due immagini: una è tratta dal mondo naturale, l'altra è un oggetto matematico: si tratta di una rete di neuroni del nostro cervello e di un *frattale*. Quale delle due è più complessa?

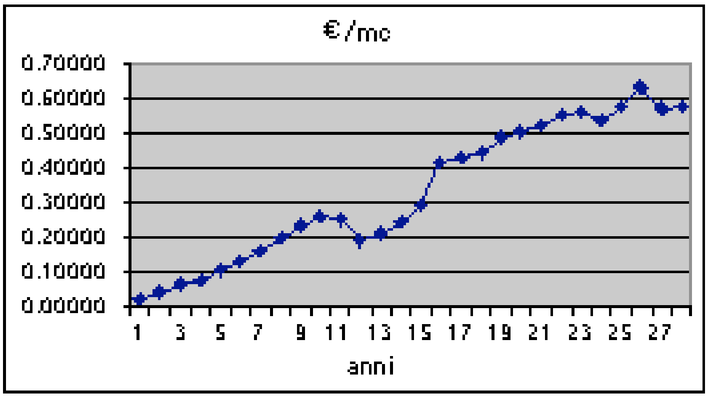
La geometria è non solo curve o superficie del piano e dello spazio, poligoni e loro misure e proprietà, ma presenta anche altri aspetti.

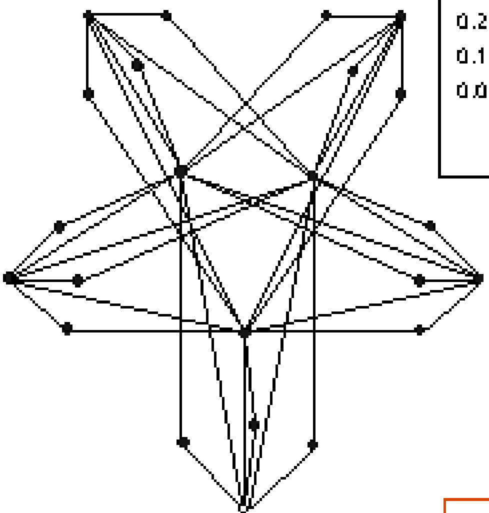
Le prossime figure mostrano alcuni di questi, senza commenti particolari: diagrammi statistici, grafi, diagrammi di Hasse, tassellazioni del piano, solidi usati nella pratica o nella fantasia.



Le torte con la TI-92

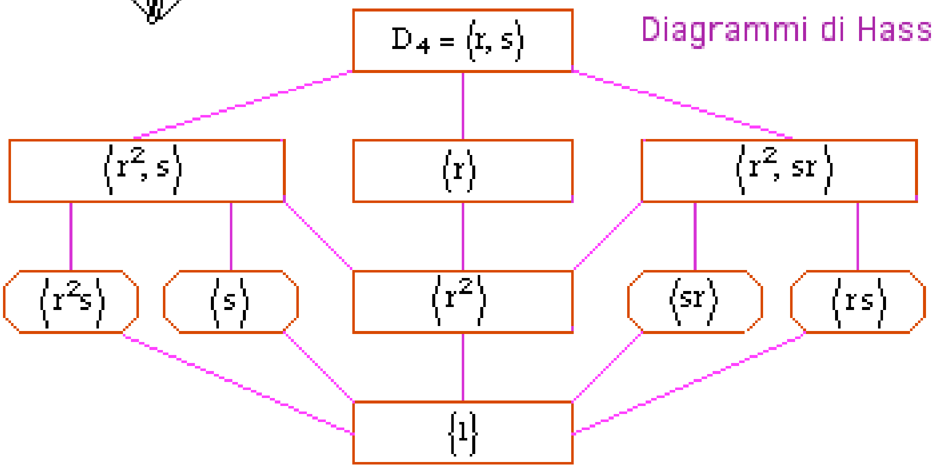
i grafici xy-line con Excel

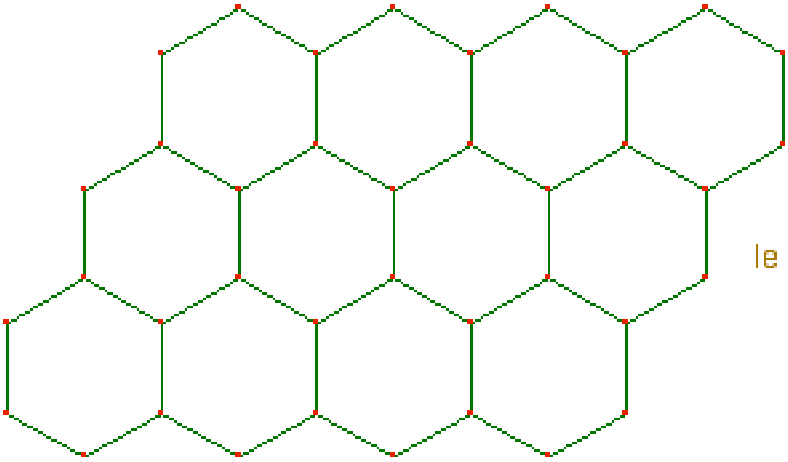




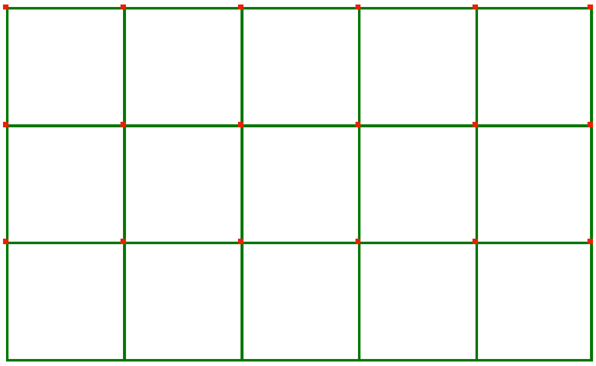
grafi non orientati, eseguiti con un programma di grafica

Diagrammi di Hasse

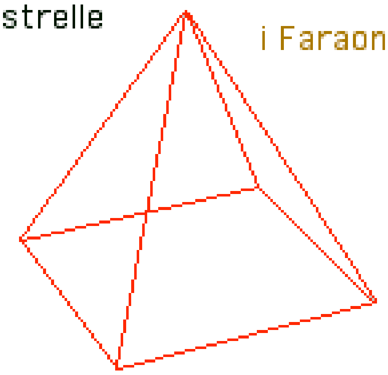




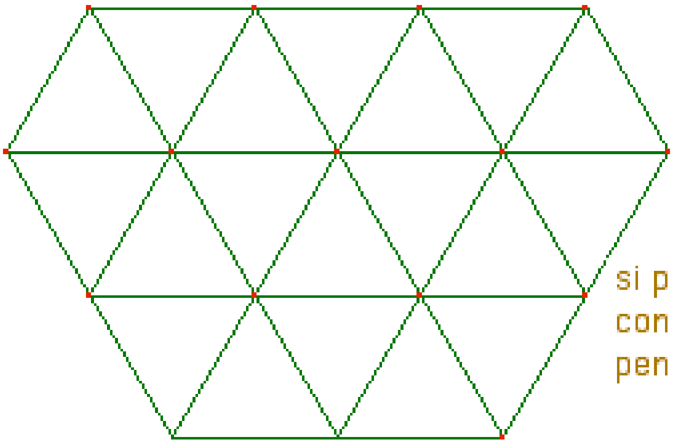
le celle delle api



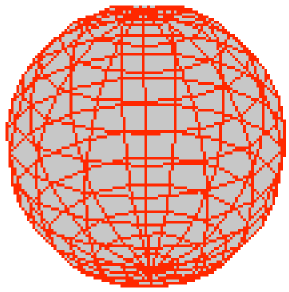
le piastrelle



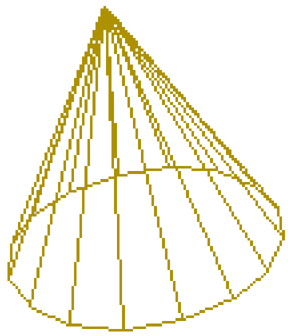
i Faraoni



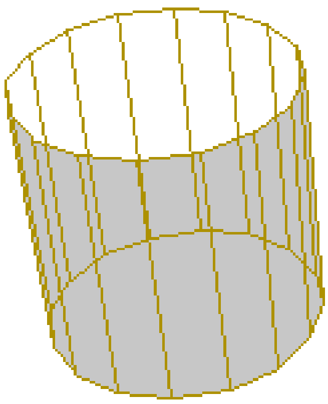
si può fare
con dei
pentagoni?



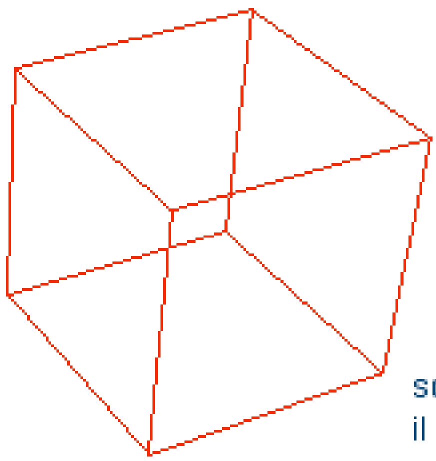
una sfera misteriosa



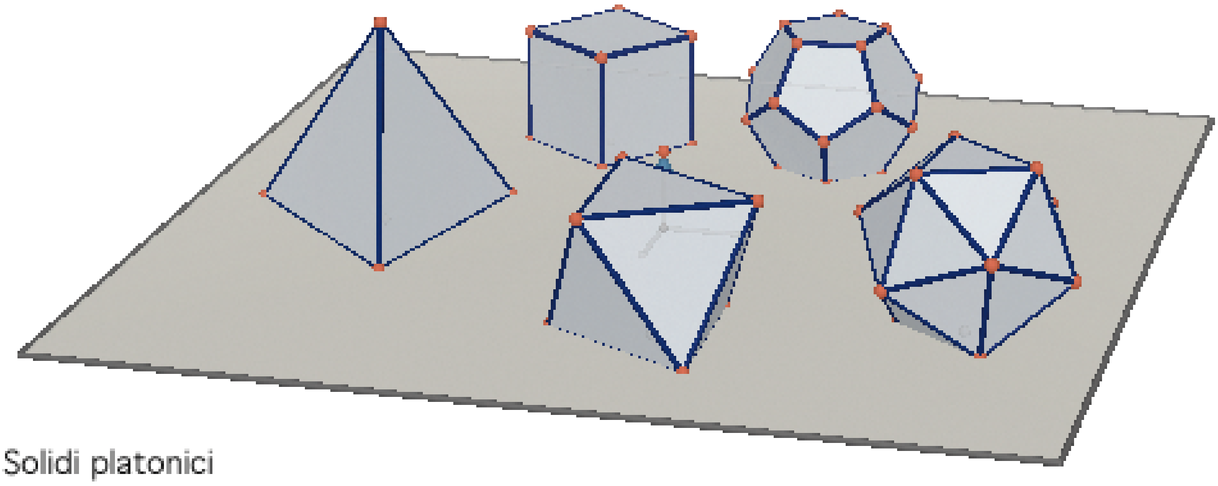
il mondo delle fate



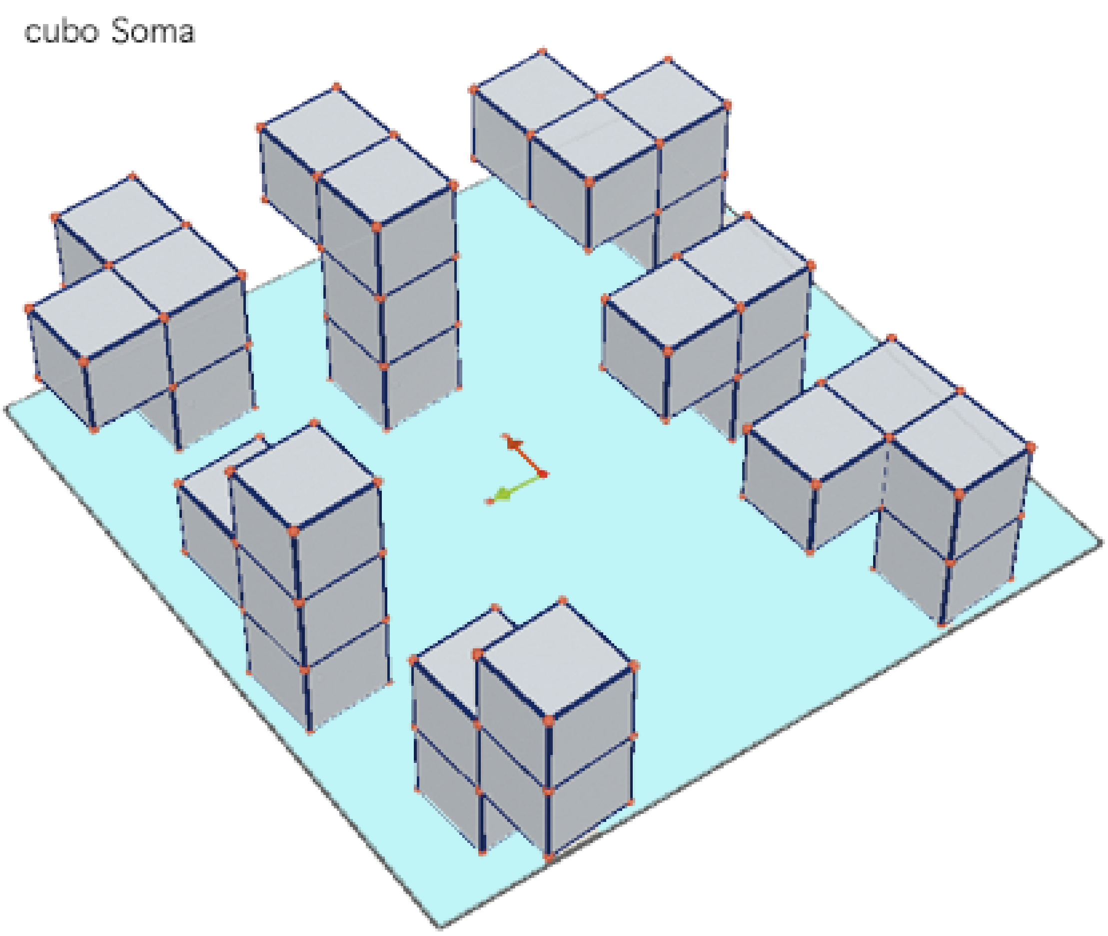
per la carta straccia



sopra o sotto
il cubo?

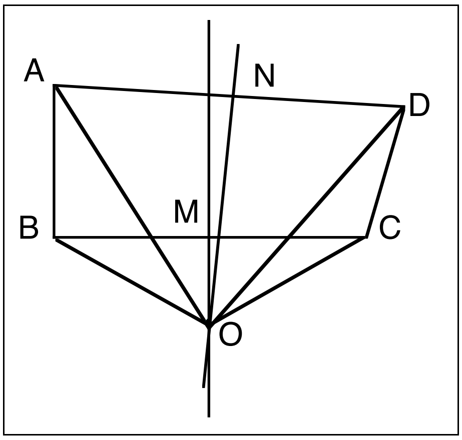


Perché sono solo cinque, mentre ci sono infiniti poligoni regolari?



Con questi sette pezzi si ricostruisce il cubo di lato 3.

Infine, un esempio di Geometria ricreativa.



La figura qui accanto mostra un quadrilatero ABCD, con AB = CD. L'angolo di vertice B è retto, l'angolo di vertice C ottuso. Allora i lati AB e CD non sono paralleli, quindi i loro assi si incontrano in un punto O.

I triangoli OAB ed OCD hanno allora i lati congruenti, quindi per il terzo criterio sono congruenti. Allora, angoli opposti a lati congruenti sono congruenti, quindi gli angoli OCD e OBA sono congruenti.

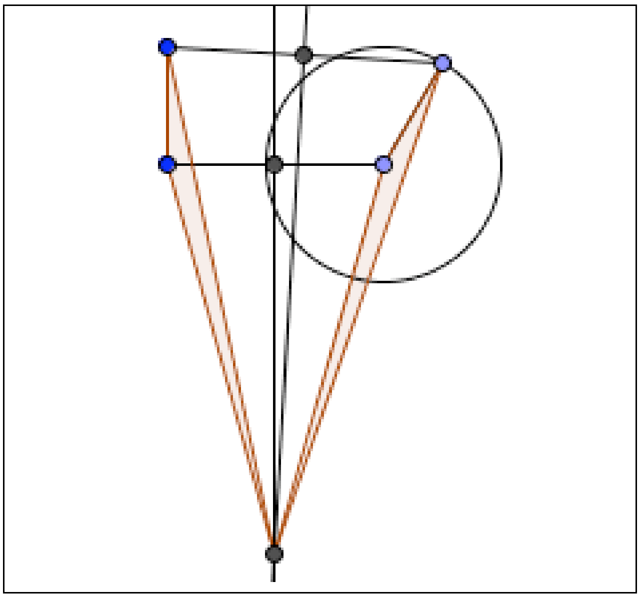
Ma gli angoli alla base del triangolo isoscele OBC sono a loro volta congruenti.

Quindi per differenza segue che l'angolo retto CBA coincide con l'angolo ottuso OCD.

Ovviamente questo risultato è contro l'ipotesi e quindi qualcosa non va nel ragionamento. Ma che cosa?

È semplice: il ragionamento è giusto, i teoremi applicati sono corretti, ma la figura è impossibile. Il ragionamento stesso mostra che il segmento OD non può tagliare il segmento BC, quindi la differenza di angoli congruenti non si può fare, perché gli angoli BCD e OCD sono consecutivi e non sovrapposti.

La figura iniziale è stata eseguita con un programma di grafica e non con un software di Geometria dinamica, come quello qui accanto. Là gli "assi" sono tracciati ad occhio.



Questo è un gioco, ma intendo sottolineare ancora la necessità di insegnare la Geometria senza limitarsi solo ad osservare e descrivere ciò che "si vede" nella figura, che potrebbe essere fuorviante, ma spiegare che serve una teoria razionale, per confrontare criticamente ciò che si osserva con ciò che si dimostra mediante le regole della logica a partire dai postulati, dalle definizioni e dai teoremi già dimostrati. So bene quanto sia difficile far comprendere questa necessità ad allievi sempre più abituati agli slogan e ai dettami dei mezzi di comunicazione di massa, però, altrimenti, a che serve la scuola?